

Exponenciális és logaritmikus kifejezések, egyenletek

1. Hatványozási azonosságok

1.1 Számítsd ki a következő hatványok pontos értékét!

a) $8^{\frac{1}{3}}$ b) $4^{\frac{5}{2}}$ c) $25^{-\frac{1}{2}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $9^{\frac{3}{2}}$
g) $9^{0,5}$ h) $16^{-0,25}$ i) $81^{0,75}$ j) $36^{1,5}$ k) $4^{-2,5}$ l) $49^{-1,5}$

1.2 A következő kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy ne tartalmazzanak gyökjelet!

a) $\sqrt[3]{x^2}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$ c) $\sqrt{a^5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$

1.3 Az alábbi kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy sem negatív, sem törtkitevőt ne tartalmazzanak!

a) $x^{\frac{2}{3}}$ b) $a^{-\frac{3}{4}}$ c) $b^{\frac{1}{4}}$ d) $(3a)^{-\frac{2}{3}}$ e) $3a^{-\frac{2}{3}}$ f) $c^{-\frac{1}{3}}$

2. A logaritmus fogalma

2.1 A következő kifejezéseket írd fel egyszerűbb alakban!

a) $2^{\log_2 5} =$ b) $7^{\log_7 9} =$ c) $8^{\log_8 3} =$ d) $10^{\lg 4} =$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 6} =$ f) $10^{\lg 7} =$

2.2 A logaritmus fogalma segítségével írd át más alakba a következő egyenlőségeket!

a) $2^3 = 8$ b) $3^2 = 9$ c) $5^4 = 625$ d) $4^{\frac{1}{2}} = 2$ e) $16^{\frac{1}{4}} = 2$ f) $64^{\frac{2}{3}} = 16$

g) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ h) $8^{-2} = \frac{1}{64}$ i) $7^0 = 1$ j) $4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ k) $81^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

2.3 Határozd meg az alábbi logaritmusok értékét!

a) $\log_4 16 =$ b) $\log_3 9 =$ c) $\log_7 7 =$ d) $\log_2 32 =$ e) $\log_2 \frac{1}{8} =$

f) $\log_5 \frac{1}{25} =$ g) $\log_8 1 =$ h) $\log_4 2 =$ i) $\log_9 \frac{1}{81} =$ j) $\log_9 3 =$

2.4 Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $3^{1+\log_3 5} =$

b) $4^{2+\log_4 3} =$

c) $2^{1+4\log_2 3} =$

d) $4^{2-\log_4 5} =$

e) $5^{\log_5 3 + \log_5 2} =$

f) $6^{\log_6 7 - \log_6 2} =$

3. A logaritmus azonosságai

3.1 Írd fel rövidebb alakban a következő kifejezéseket!

a) $2(3 \log_k x + 5 \log_k y) - 4 \log_k z =$

b) $7 \log_k a + \frac{3 \log_k x + 2 \log_k y + 5 \log_k z}{4} =$

c) $\frac{5 \log_k a + \log_k b}{3} + \frac{2 \log_k x + 3 \log_k y}{5} =$

d) $\frac{\lg 2 + \lg a - \lg c}{3} + \frac{2(\lg 3 + \lg x - 3 \lg y - 4 \lg z)}{5} =$

3.2 Határozd meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $5^{-1} \cdot 3^{\log_3 8} \cdot \lg \sqrt[5]{1000} =$

b) $7^{7 \log_7 2 - \log_7 5} \cdot \lg \sqrt[10]{10} \cdot \log_5 \sqrt[3]{25} =$

4. Exponenciális egyenletek

4.1 Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $7^{x+1} - 6 \cdot 7^x - 5 \cdot 7^{x-1} = 14$

b) $7^{x+1} - 6 \cdot 7^x + 5 \cdot 7^{x-1} = 14$

c) $3^{x-2} + 4 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 4$

d) $3^x - 3^{x-2} = 24$

4.2 Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $7 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+3} = 3^{x+2} - 3^{x+1}$

b) $25 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^{x-1}$

c) $16 \cdot 2^{x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$

d) $8^{5x-3} \cdot 8^{-2x+1} = 8^{3x+2} \cdot 8^{-4x+4}$

4.3 Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $4^{x+1} + 2^{2x+2} - 12 = 0$

b) $2^{2x-3} + 4^{x-1} - 24 = 0$

c) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$

d) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$

5. *Logaritmikus egyenletek*

5.1 Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+1) = \frac{\lg(6-2x)}{2}$

b) $2\lg(x-4) - \lg 4 = \lg(2x-11)$

c) $2[\lg(x-2) + \lg 5] = 2 + \lg(x+46)$

d) $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 1$

e) $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 2$

Koordinátageometria

1. Műveletek vektorokkal

1.1 Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Rajzold meg a következő vektorokat!

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ g) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$ h) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ i) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$

1.2 Rajzolj tetszőleges (nullvektortól különböző) \vec{a} és \vec{b} vektort! Szerkeszd meg az alábbi vektorokat!

a) $2\vec{a}$ b) $-2\vec{a}$ c) $1,5\vec{a}$ d) $3\vec{a}$ e) $\frac{2}{3}\vec{a}$
f) $\vec{a} + 2\vec{b}$ g) $\vec{a} - 2\vec{b}$ h) $0,5\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ i) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

1.3 Egy C pont helyvektora \vec{c} , egy tetszőleges P ponté \vec{p} . Határozd meg a P pont C-re vonatkozó tükörképének helyvektorát!

1.4 Rajzold meg az alábbi helyvektorokat a derékszögű koordináta-rendszerben, majd számítsd ki a hosszúságukat!

a) (4; 2) b) (-5; 3) c) (-6; -3) d) (4; -2) e) (0; 0) f) $(\sqrt{3}; 0)$

1.5 Egyenlő szárú háromszög alapja 10, magassága 6 hosszúságegység. Határozd meg a háromszög csúcsainak helyvektorait, ha úgy helyezük el a koordináta-rendszerben, hogy a kezdőpont az alap egyik végpontjába van, és az alap az x tengelyre illeszkedik. Hány megoldás van?

1.6 Rajzold meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek

a) az abszcisszája 0. b) az ordinátája 0. c) az abszcisszája 2.
d) az ordinátája 4. e) az abszcisszája -3. f) az ordinátája -5.
g) az abszcisszája és az ordinátája egyenlő.

1.7 Az $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(4; -5)$ és $\vec{c}(-3; 8)$ vektorokat 90° -kal elforgatjuk. Határozd meg az elforgatott helyvektorok koordinátáit! Írd fej azokat a vektorokat is, amelyek az eredeti vektorokból -90° -os elforgatással adódnak!

1.8 Legyen az $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(-4; 2)$ és $\vec{c}(-2; -58)$. Számítsd ki a következő vektorok koordinátáit!

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{c}$ c) $\vec{a} - 2\vec{b}$ d) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ e) $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

Ábrázold a kapott helyvektorokat!

1.9 Egy csónak sebessége állóvízben $12 \frac{km}{h}$. A csónak $3 \frac{km}{h}$ sebességű folyóban a partra merőlegesen indul.

a) Szerkessze meg a csónak eredő sebességét, ha 1 cm-nek vesszük a $3 \frac{km}{h}$ sebességvektor hosszát!

b) Számítsa ki az eredő sebesség nagyságát!

1.10 Három kutya egyenként $120 N$ erővel húz egy szánt. A szomszédos kutyák kötelei 30° -os szöget zárnak be. Szerkessze meg az eredő erőt!

1.11 Adott az $\vec{a} (2; 3)$ és $\vec{b} (1; 4)$ vektor.

a) Szerkessze meg a $\vec{v} (7; 6)$ vektor \vec{a} -val és \vec{b} -vel párhuzamos összetevőit!

b) Számítással határozza meg az összetevők koordinátáit!

1.12 Egy katicabogár az $A (2; 4)$ pontból 7 másodpercen át egyenes vonalú egyenletes mozgást végzett, 1 s múlva a $B (3; 3)$ pontban volt.

a) Írja fel a sebességvektorát!

b) Mekkora utat tett meg összesen a bogár 7 másodperc alatt?

2. Vektorok skaláris szorzata

2.1 Szánkót húz egy ifjú apa $110 N$ egyenletes erővel, miközben a kötélt 30° -os szöget zár be a vízszintessel. Mekkora munkát végez, ha 150 métert húzza így gyermekét? (A végzett munka az erő- és az elmozdulás-vektor skaláris szorzata.)

2.2 Mekkora az egyenlő (de nem nulla) hosszúságú \vec{a} és \vec{b} szöge, ha az $\vec{a} + 2\vec{b}$ és az $5\vec{a} - 4\vec{b}$ egymásra merőleges vektorok?

2.3 Határozd meg az \vec{a} és \vec{b} egységvektorok által bezárt szöget, ha $\vec{a} + 3\vec{b} \perp 5\vec{a} - 4\vec{b}$!

2.4 Két egymással 60° -os szöget bezáró vektor skaláris szorzata 4. Ha az egyik vektor hossza a másik kétszerese, akkor

a) milyen hosszúak a vektorok?

b) mekkora a két vektor összege?

c) mekkora a két vektor különbsége?

2.5 Adott két vektor: $\vec{a} (4; 3)$, $\vec{b} (-1; 2)$. Ábrázold a két vektort koordináta-rendszerben

a) Mi az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ szorzat értéke?

b) Határozd meg a vektorok hosszát!

c) Mekkora a két vektor hajlásszöge?

2.6 Határozd meg az $\vec{a} (8; -3)$, $\vec{b} (2; 6)$ vektorok hajlásszögét!

2.7 Egy háromszög csúcsai: $A(2; 0)$, $B(5; 4)$, $C(-1; 3)$. Mekkora a háromszög szögei?

3. **Felezőpont, harmadoló pont**

3.1 Számítsd ki az $A(0; -1,6)$ és $B(2,8; 4)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontjának koordinátáit!

3.2 Legyen $\vec{OA}(3; 7)$, $\vec{OB}(9; -1)$! Határozza meg \vec{AB} -t, valamint az AB szakasz felezőpontjához és harmadoló pontjaihoz az O -ból induló vektorok koordinátáit!

4. **Háromszög súlypontja**

4.1 Egy háromszög csúcsai: $A(2; 0)$, $B(5; 4)$, $C(-1; 3)$. Határozd meg a súlypontjának a koordinátáit!

5. **Az egyenes egyenlete**

5.1 Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és illeszkedik az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ koordinátájú pontra!

5.2 Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely

a) áthalad az $(1; 3)$ ponton és normálvektora $(2; -1)$?

b) áthalad a $(3; -2)$ ponton és irányvektora $(-4; 1)$?

c) áthalad a $(2; 3)$ és $(-1; -4)$ pontokon?

Ábrázold a fenti egyeneseket!

5.3 Állapítsd meg, hogy rajta van-e a $2x - y = 3$ egyenesen az $(1; 1)$ pont!

5.4 Mely pontokban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit az $x - 5y = -10$ egyenletű egyenes? Ábrázold az egyenest!

5.5 Adj meg 2 pontot, amelyek illeszkednek a $-x + 3y = 5$ egyenesre!

6. Egyenesek metszéspontja

6.1 Ábrázold az egyeneseket, és számítsd ki a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!

$$a: 2x - 3y - 12 = 0$$

$$b: 5x + 4y - 7 = 0$$

6.2 Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$a: 9x - 6y + 54 = 0$$

$$b: x + 4y - 8 = 0$$

$$c: 11x + 2y - 46 = 0.$$

Számítsd ki a területét!

6.3 Számítsd ki a $P(-3; 1)$ pont és az $e: 3x + 5y - 15 = 0$ egyenes távolságát!

6.4 Írd fel a $P(-2; 5)$ és $Q(6; 7)$ pontok által meghatározott szakasz felező merőlegesének egyenletét!

6.5 Számítsd ki a $P(-1; 3)$ pont és a $4x - 3y = 12$ egyenletű egyenes távolságát!

6.6 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-2; 0)$, $B(3; 3)$ és $C(-2; 4)$. Hol metszi a C csúcsból induló magasságvonal a koordináta tengelyeket?

6.7 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-1; 4)$, $B(-3; -2)$ és $C(2; 1)$. Mekkora darabokat vág le a C csúcsból induló súlyvonal a koordinátatengelyekből?

6.8 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-3; 1)$, $B(3; -1)$ és $C(2; 3)$. Írja fel a súlyvonalak egyenletét, és határozza meg a súlyvonalak közös pontját!

6.9 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $(4; 0)$, $(-3; -1)$ és $(-5; 6)$. Írd fel az oldalfelező merőlegesek egyenletét, és határozd meg a merőlegesek közös pontját!

7. A kör egyenlete

7.1 Egy kör középpontja $C(1; -5)$, sugara 5 egység. Írd fel a kör egyenletét!

7.2 Egy kör egyik átmérőjének két végpontja: $A(-1; -1)$ és $B(7; 5)$. Írd fel a kör egyenletét!

7.3 Rajzold le koordináta-rendszerbe azt a kört, melynek középpontja a $C(-3; 5)$ pont és érinti az y tengelyt! Határozd meg a sugarát! Írd fel a kör egyenletét!

7.4 A következő másodfokú kétismeretlenes egyenletek közül válaszd ki azokat, amelyek kör egyenletei lehetnek, határozd meg a kör középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 5x - 3y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 35 = 0$

d) $-2x^2 - 2y^2 + 4x + 8y + 22 = 0$

7.5 Határozd meg az $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus (azonos középpontú) 5 egység sugarú kör egyenletét!

7.6 Döntsd el, hogy rajta vannak-e az alábbi pontok az $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ egyenletű körön!

a) $A(10; 24)$ b) $B(14; 7)$

7.7 Mi annak a körnek az egyenlete, ami áthalad a $P(1; 2)$ és az $R(4; -3)$ pontokon, és a középpontja az $y = 3x - 19$ egyenletű egyenesen van?

8. **Kör és egyenes metszéspontja**

8.1 Számítsd ki az $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ egyenletű kör és az $y = x - 7$ egyenletű egyenes metszéspontjainak koordinátáit!

8.2 Milyen hosszúságú húrt vág ki az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenesből az $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$?

8.3 Az $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ egyenletű körhöz az $P(10; 24)$ pontjában érintőt húzunk. Írja fel az érintő egyenletét!

8.4 Az $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ egyenletű körnek van-e olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a $(-3; 2)$ és $(1; 0)$ koordinátájú pontoktól?

Trigonometria

1. Szögfüggvények általános értelmezése, azonosságok

1.1 Válaszd ki az alábbi állítások közül az igazakat!

$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$$

$$\cos 520^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\sin 840^\circ \leq 0$$

$$\cos 150^\circ \geq 0$$

$$\sin 810^\circ = 0$$

$$\cos 1080^\circ = 1$$

1.2 Mely valós számokra teljesül, hogy $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$?

1.3 Mely valós számokra teljesül, hogy $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1.4 Mely valós számokra teljesül, hogy $\operatorname{tg} \alpha = -1$?

2. Szinusz-, koszinusz- és tangensfüggvény ábrázolása és jellemzése

2.1 Ábrázold és jellemezd a tanult trigonometrikus függvényeket!

3. Számolások derékszögű háromszögben

3.1 Egy hegy északi lejtője 5 km hosszú és 30° -os szöget zár be az alapsíkkal. A déli lejtő hossza 8 km. Milyen magas a hegy, és milyen meredek a déli lejtő?

3.2 Egy 3 méter hosszú, függőleges falhoz támasztott létra lába a faltól 50 cm-re van.

a) Mekkora szöget zár be a létra a fallal?

b) Milyen magasan van a falhoz támasztva?

c) Legfeljebb milyen távol lehet a lába a faltól, ha tudjuk, hogy biztonsági okokból a létrának a talajjal legalább 70° -os szöget kell bezárnia?

3.3 Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 26 cm és 42 cm. A hosszabb alapon fekvő szögei 40° és 60°

a) Mekkora a trapéz szárjai?

b) Mekkora a trapéz kerülete és területe?

4. Szinusztétel, koszinusztétel

4.1 Egy háromszögben $a = 7$, $b = 6$ és $\gamma = 40^\circ$. Mekkora lehet c , α , β ?

- 4.2 Egy kikötőből egymástól 109° -ban eltérő irányban indul el két hajó. Az egyik sebessége $46 \frac{km}{h}$, a másiké $62 \frac{km}{h}$. Milyen messze lesz egymástól a két hajó 2 óra 20 perc múlva?
- 4.3 Egy kismotoros repülőgép a felszállás óta 40 km -t tett meg déli irányban, majd 15° -ot fordult nyugat felé, és megtett újabb 32 km -t. Milyen messze van ekkor a kiindulási helyétől?
- 4.4 Egy háromszög egyik szöge 64° , ennek a szögnek a felezője 12 cm , a szög csúcsából kiinduló magasság hossza pedig 10 cm . Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

5. *Trigonometrikus egyenletek*

5.1 $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.2 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

5.3 $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3,2$